

Государственное бюджетное общеобразовательное учреждение средняя  
общеобразовательная школа с .Чёрный Ключ муниципального района  
Клявлинский Самарской области

Проверено  
Зам. директора по ВР  
\_\_\_\_\_ Семенова Т.И.  
(подпись) (ФИО)  
« \_\_\_\_ » \_\_\_\_\_ 2023 г.

Утверждено  
приказом № 52/6 - од  
от « 30» августа 2023 г.  
Директор \_\_\_\_\_ Ильина В.В.  
(подпись) (ФИО)

**Рабочая программа внеурочной деятельности**  
**«Тригонометрия за рамками школьного учебника»**  
**среднего общего образования**  
**Направление: Общеинтеллектуальное**

Рассмотрена на заседании МО учителей естественно-научного и математического цикла  
(название методического объединения)  
Протокол № \_\_\_\_\_ от « \_\_\_\_ » \_\_\_\_\_ 2023г.  
Руководитель МО \_\_\_\_\_ Антонова В.В.  
(подпись) (ФИО)

## **Пояснительная записка.**

Данная программа курса своим содержанием сможет привлечь внимание старшеклассников, которым интересна математика и тех, кто захочет глубже и основательнее познакомиться с различными способами преобразования тригонометрических выражений, полнее изучить методы и способы решения тригонометрических упражнений и неравенств, познакомиться с нестандартными способами решения уравнений и неравенств, причем, не только тригонометрических: в совершенстве овладеть решениями упражнений, содержащих параметр, что очень актуально на современном этапе.

Этот курс, безусловно, заинтересует и учителей математики возможностью познакомить своих учеников с теми способами решения указанных упражнений, поскольку они не изучаются даже в школьном расширенном курсе, не говоря о базисном уровне.

Данная тема тесно связана почти со всеми разделами математики школьного курса, имеет практическое применение в курсе физики, информатики, невозможно изучение многих предметов высшей школы, не зная того материала, что предусматривает данная программа.

Многолетний опыт преподавания математики показывает, что усвоение данной темы для учащихся представляет особую трудность. В связи с этим появляется тенденция к поверхностному изучению темы, что приводит к формализму изучения, часто учащиеся овладевают лишь базисным уровнем, к тому же анализ КИМов единого государственного экзамена в части «С» показывает, что знания по данной теме актуальны и сегодня, и будут актуальны всегда.

Рабочая программа «Тригонометрия за рамками школьного учебника» направлена на углубленное изучение указанной темы, что способствует развитию логического мышления учащихся, а также составлению задач путем применения исследовательской деятельности. Программа основывается преимущественно на методах активного обучения (творческих, исследовательских, проектных), предусматривает полноту и завершенность содержательных линий.

### **Цели программы:**

Сформировать у учащихся навыки решения заданий повышенной сложности:

- а) некоторые дополнительные формулы тригонометрии;
- б) тригонометрические функции, их свойства, графики;
- в) преобразование тригонометрических выражений;
- г) тригонометрические уравнения, неравенства и системы;
- д) отбор корней в тригонометрическом уравнении.
- е) нестандартные тригонометрические уравнения.
- ж) уравнения, содержащие обратные тригонометрические функции.

### **Задачи :**

- помочь самоопределению учащихся путем погружения в ситуацию самостоятельного выбора, индивидуальной образовательной траектории;
- активизировать познавательную деятельность учащихся III ступени;
- повышать информационную и коммуникативную компетентность старшеклассников;
- подготовка учащихся к успешной сдаче ЕГЭ по математике;
- создание условий для креативной деятельности группы учащихся.

## Общая характеристика учебного процесса.

При проведении занятий по данному курсу уместны будут такие формы организации занятий как дискуссия, диспут, выступление с докладами – отчетами с разобранными решениями той или иной конкурсной задачи, осуществление «поисковой» работы в медиа – центрах, как с помощью руководителя курсов, так и самостоятельно, используя, в том числе и Интернет.

Безусловно, все выше сказанное не исключает традиционные формы организации занятий как лекция, беседа, семинар, рассказ и т.д.

Возможно, что данный курс поможет кому-либо из учеников найти свое призвание в профессиональной деятельности, потребовавшей использовать физико-математические науки или, по крайней мере, приобрести внепрофессиональное увлечение предметом пусть не «на всю оставшуюся жизнь», а хотя бы до поступления и обучения в ВУЗе.

Ресурсным обеспечением для изучения указанной темы для учителя является тот обширный список литературы, который указан в конце программы, отдельно можно указать литературу для учащихся:

1. И.Ф.Шарыгин, В.И.Голубев «Факультативный курс по математике. Решение задач (учебное пособие для 11 класса)», изд «Просвещение», 2014 г.
2. Б.М.Ивлев, А.М.Абрамов и др. «Задачи повышенной сложности по алгебре и началам анализа», Москва, изд. «Просвещение», 2014 г.
3. Л.И.Званич, Л.Я.Шляпочкин «Алгебра и начала анализа, 8 – 11 классы (для углубленного изучения)»
4. В.Н.Литвиненко, А.П.Моркович «Практикум по решению математических задач. Алгебра. Тригонометрия». Москва, «Просвещения», 2014 г.
5. Материалы по ЕГЭ по математике, 2015 – 2019 гг.

## Содержание программы.

**Введение:** из истории тригонометрии (1 час.).

**Тема 1:** Некоторые дополнительные формулы тригонометрии (2 часа.).

Вывод формул:

$$1. \cos^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha)$$

$$2. \sin^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha)$$

$$3. \sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{2}(\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta))$$

$$4. \cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta))$$

$$5. \sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta))$$

$$6. \operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{tg} \beta = \frac{\cos(\alpha \pm \beta)}{\sin \alpha \cos \beta}$$

$$7. \sin \alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}, (\alpha \neq (2n + 1)\pi \in z)$$

$$8. \cos \alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}, (\alpha \neq (2n + 1)\pi \in z)$$

**Тема 2:** Тригонометрические функции, их свойства и графики. (4 часа).

Функции

$y = A \sin \kappa x$ ,  $y = A \cos \kappa x$ ,  $y = A \operatorname{tg} \kappa x$ ,  $y = A \operatorname{ctg} \kappa x$ ,  $y = A \sin(\kappa x + \vartheta)$ ,  $y = A \cos(\kappa x + \vartheta)$  и т.д., их свойства, построение графиков.

Гармоническое колебание.

Гармоническое колебание в электротехнике.

**Тема 3:** Преобразование тригонометрических выражений. (4 часа).

Вычисление и сравнение значений тригонометрических выражений, преобразование тригонометрических выражений, доказательство тождеств.

#### **Тема 4: Тригонометрические уравнения и неравенства. (17 часов).**

Разложение на множители уравнения  $f(x) = 0$ . Приведение уравнения к алгебраическому относительно какой – либо тригонометрической функции, сведение уравнения к однородным относительно  $\sin x$  и  $\cos x$ . Преобразование суммы тригонометрических функций в произведение. Использование формул понижения степени. Замена переменного. Отбор корней в тригонометрических уравнениях. Системы тригонометрических уравнений. Запись ответа в системах тригонометрических уравнений. Нестандартные тригонометрические уравнения. Уравнения, содержащие обратные тригонометрические функции. Тригонометрические неравенства, нестандартные тригонометрические неравенства. Тригонометрические уравнения и неравенства, содержащие параметр.

#### **Тема 5: Решение уравнений и неравенств с использованием свойств входящих в них функций. (6 часов).**

Использование ОДЗ, использование свойств синуса, косинуса. Решение некоторых уравнений и неравенств сведением их к решению систем уравнений или неравенств относительно той же неизвестной. Использование ограниченности функций.

#### **Резерв 2. Научно-практическая конференция.**

### Учебно-тематическое планирование (примерное)

№ п/п	Тема	Общее кол-во часов	В том числе		
			Практич. деят.	Внеуроч. сам.деят. уч-ся	Информ. учителя
1.	Введение (из истории тригонометрии)	1		1,5 – 2	45 мин
2.	Некоторые дополнительные формулы	2	1,5	0,5	0,5
3.	Тригонометрические функции, их свойства и графики	4	3	1,5	1
4.	Преобразование тригонометрических выражений	4	3,5	2	0,5
5.	Тригонометрические уравнения и неравенства	17	14	7	3
6.	Решение уравнений и неравенств с использованием свойств входящих в них функций	6	4	2	2

## Методическая часть.

В результате изучения данного курса «Тригонометрия за рамками школьного учебника» учащиеся должны усвоить теоретический материал и уметь его применять при выполнении упражнений.

**I тема:** уметь выводить формулы тригонометрии, выполнять достаточно сложные преобразования тригонометрических выражений; уметь вычислять и сравнивать значения тригонометрических функций.

Например:

а) определять знак числа  $\sin 355^\circ$ .

б) что больше  $\sin 10$  или  $\sin 11$

в) сравните числа  $\operatorname{cosec} \frac{1}{2}$  и  $4(1 - \sin \frac{1}{2})$

г) расположите в порядке возрастания числа:  $\sin 4$ ,  $\cos 2$ ,  $\operatorname{tg} 3$ ,  $\operatorname{ctg} 6$ .

**II тема:** знать свойства тригонометрических функций, уметь строить их графики. Уметь преобразовывать графики. При изучении данной темы учащиеся прослеживают межпредметную связь, а именно математики и физики, изучая гармонические колебания, гармонические колебания в электротехнике.

*Примеры:*

- Найдите  $E(y)$  если  $a) y = \cos^2 \chi - \cos \chi$   
 $b) y = \sqrt{1 - \sin \chi \operatorname{ctg} \chi}$ ;
- Докажите, что функция не является периодической  $a) f(\chi) = \cos \chi \cos(\chi \sqrt{2})$   
 $b) f(\chi) = \sin \chi^2$
- Найти наименьший положительный период функции  $a) y = \cos^3 \chi, b) y = \sqrt{|\sin 2\chi|}$
- Постройте график функции  $y = \begin{cases} -\operatorname{ctg} \chi, & \text{если } |\chi| < \pi, \\ 3 \cos \frac{\chi}{2}, & \text{если } |\chi| \geq \pi, \end{cases}$

**III тема:** уметь преобразовывать тригонометрические выражения, используя все изученные формулы, уметь доказывать тождества, так как во многих случаях упрощение тригонометрических выражений не является самоцелью, а представляет собой существенный элемент решения задач, решения уравнений, неравенств, геометрических задач.

**IV, V темы:** усвоить все изученные методы решения уравнений и неравенств, уметь отбирать корни тригонометрических уравнений. Уметь решать уравнения, решения которых основывается на ограниченности функций  $\sin x$  и  $\cos x$ , например, решить уравнение:  $\sin 5\chi - 2\cos 2\chi = 3$ .

Уметь решать нестандартные уравнения, содержащие обратные тригонометрические функции, например:

$$a) \arccos \chi = \operatorname{arctg} \chi$$

$$б) \arcsin \frac{\chi}{2} + 2 \arccos \chi = \pi$$

Уметь решать тригонометрические неравенства, так как программа школьная предусматривает решение лишь простейших тригонометрических неравенств, причем оговаривается, что данная тема изучается в ознакомительном плане.

Школьная программа так же не предусматривает решение некоторых уравнений и неравенств сведением их решения к решению систем уравнений или неравенств относительно той же неизвестной, поэтому изучить указанный способ необходимо, тем более подобные уравнения предполагаются на вступительных экзаменах в ВУЗы, в ЕГЭ.

**Критерии эффективности реализации программы, формы контроля и методы оценки знаний, умений и навыков учащихся.**

Чтобы оценить динамику усвоения учащимися теоретического материала и поставить учащегося перед необходимостью постоянно заниматься, добыть новые знания, расширить свой интеллект психологически очень важно показать подростку объективную картину об уровне его знаний и умений, а, значит, и об ожидающей его оценке. Да, к тому же, знание учителем уровня владения его учениками определенной темы позволяет ему вовремя внести определенные коррективы в учебный процесс.

Данный курс очень широк, поэтому довольно много возможностей разнообразить формы контроля за усвоением как теоретического, так и практического материала.

Здесь можно предполагать и индивидуальные, самостоятельные работы по каждой теме, тестирование, контрольные работы, зачеты, доклады.

По теме «Гармонические колебания. Гармонические колебания в электротехнике» можно предложить подготовить реферат отдельному ученику или группе учащихся.

По теме «Функции и графики» можно предложить индивидуальные задания каждому ученику с последующей оценкой его работы, по этой же теме можно провести устный зачет, тем самым, развивая способность публичного выступления.

По теме «Тригонометрические преобразования» можно провести дискуссию, поскольку всякое тригонометрическое выражение может быть преобразовано несколькими путями. Здесь вполне ребята могут поспорить. На мой взгляд, по этой теме можно предложить учащимся составить упражнения, найти интересные задачи, показать их решения своим сверстникам. Такая исследовательская работа так же может быть оценена учителем.

**Темы IV,V** - центральные, поэтому здесь возможные всякие формы контроля: традиционные – самостоятельные работы, индивидуальные, домашние задания на оценку, тестирование, зачет; так же можно предложить творческое задание – доклад одному или группе учащихся, с которыми они могут выступить на школьной научной конференции или перед одноклассниками.

*Завершить изучение курса контрольной работой.*

***Критерии выставления итоговых оценок могут быть следующими:***

- оценка «отлично» «5» - учащийся идеально освоил теоретический материал курса, блестяще применяет его при решении конкретных математических задач, в том числе упражнения типа группы «С» № № 3,4,5 в заданиях ЕГЭ, в процессе написания, защиты доклада, реферата, работы над индивидуальным домашним заданием. Продемонстрировал умение работать с информацией, принимал самое активное участие во время дискуссии, научился добывать и использовать информацию, рекомендованные как на бумажных, так и на электронных носителях. Очевиден его интеллектуальный рост и рост его общих умений.

- оценка «хорошо» «4» - учащийся усвоил идеи и методы данного курса в такой степени, что может справиться со стандартным заданием. Ученик может написать доклад, реферат, но не проглядывается творческий подход. Выполнил индивидуальную, самостоятельную работу, но с некоторыми недочетами. То есть, оценка «хорошо» - это оценка за усердие и прилежание, которые привели к положительным результатам, свидетельствующим и об интеллектуальном росте, и о возрастании общих умений. Учащийся легко решает задания типа «С 1», «С 2» в ЕГЭ.

- оценка «удовлетворительно» «3» - учащийся усвоил простые идеи и методы курса, что позволяет ему решать упражнения по данному курсу хорошо, в пределах школьной программы, легко решает задачи группы «В» в ЕГЭ.

- оценки «неудовлетворительно» «2» - считаю не следует ставить по той простой причине, что таких учеников на элективных курсах быть не может, так как это – курс по выбору.

## Список литературы.

1. Е.С.Кочеткова «Алгебра и элементарные функции» часть 2, Москва, «Просвещение», 1975 г.
2. М.И.Сканави «Сборник задач по математике для поступающих в ВУЗы», книга I «Алгебра», Москва, «Высшая школа», 1994 г.
3. И.Ф.Шарыгин, В.И.Голубев «Факультативный курс по математике. Решение задач», Москва, «Просвещение», 1991 г.
4. Б.М.Ивлев, А.М.Абрамов, Ю.П.Дудницын, С.И.Шварцбурд «Задачи повышенной сложности по алгебре и началам анализа», Москва, «Просвещение», 1990 г.
5. М.И.Якимова «Методические указания и контрольные задания по математике для заочных и очно – заочных подготовительных курсов», Самара, 2005 г.
6. Л.И.Звавич, Л.Я.Шляпочкин «Алгебра и начала анализа, 8 – 11 классы. (Для углубленного изучения).
7. Н.Я.Виленкин, Л.П.Имбасов «За страницами учебника математики, 10 – 11 класс»
8. В.Н.Литвиненко, А.П.Мордкович «Практикум по решению математических задач. Алгебра. Тригонометрия», Москва, «Просвещение», 1984 г.
9. Л.О.Даницева, Т.А. Корешкова «Алгебра и начала анализа. Тематические тесты и зачеты».
10. П.А.Ястрибицкий «Задачи с параметрами», Москва, «Просвещение», 1986 г.
11. «Тематические тренировочные материалы для подготовки к ЕГЭ по математике». Составители: С.Н.Богданов, Е.А.Богданова, Г.А.Кликовкин, Ю.Н.Неценко, Т.П.Шаповалова, А.А. Максютин Самара, СИПКРО, 2008, 2009, 2010 гг.
12. «Сборник задач по математике для поступающих в ВУЗы» под редакцией А.И.Прилепко, Москва, «Высшая школа», 1989 г.
13. «Материалы ЕГЭ по математике», «Фолио», 2008, 2009 гг.
14. Ф.Ф.Лысенко «ЕГЭ – 2005. Математика», Ростов – на – Дону, 2009 г.
15. Учебно – тренировочные тесты (30 вариантов)

**Тематическое планирование элективного курса  
«Тригонометрия за рамками школьного учебника»**

№	Темы	Кол – во часов	Примечания
1	Введение. Из истории тригонометрии.	1	Доклад
2 – 3	Тема 1. Некоторые дополнительные формулы тригонометрии.  Тема 2. тригонометрические функции, их свойства и графики.	2  4	Реферат
4	Функции $y = A \sin kx$ , $y = A \cos kx$ , $y = A \operatorname{tg} kx$ , $y = A \operatorname{ctg} kx$ , их свойства, построение графиков.	1	Индивидуальные домашние задания
5 – 6	Функции $y = A \sin(kx + \varphi)$ , $y = A \cos(kx + \varphi)$ и т.д., их свойства и графики, зачет.	2	
7	Гармонические колебания. Гармонические колебания в электротехнике.	1	Реферат
	Тема 3. преобразование тригонометрических выражений.	4	
8	Вычисление и сравнение значений тригонометрических выражений.	1	Лекция
9 - 10	Преобразование тригонометрических выражений.	2	Семинар
11	Доказательство тождеств. Домашняя индивидуальная самостоятельная работа.	1	Доклад
	Тригонометрические уравнения и неравенства	17	
12 – 14	Решение тригонометрических уравнений (разложение на множители, замена переменной, сведение уравнения к однородным относительно $\sin x$ и $\cos x$ , исследование формул понижения).	3	Семинар  Индив. творч. задания
15 – 16	Решение систем уравнений, запись ответа в системах тригонометрических уравнений.	2	Семинар
17 – 18	Отбор корней в тригонометрических уравнениях.	2	Семинар  Индив. творч.

			задания
19 – 20	Уравнения, содержащие обратные тригонометрические функции.	2	Семинар Индив. творч. задания
21 – 22	Решение тригонометрических неравенств.	2	Лекция
23 – 24	Нестандартные тригонометрические уравнения и неравенства.	2	Лекция Семинар
25 – 27	Тригонометрические уравнения, неравенства, содержащие параметр.	3	Лекция
28	По данной теме домашняя индивидуальная контрольная работа.	1	Семинар
	Тема 5. Решение уравнений и неравенств с использованием свойств входящих в них функций.	6	
29 – 30	Использование ОДЗ. Использование свойств синуса и косинуса.	2	Доклад
31	Использование ограниченности функций.	1	Доклад
32	Использование монотонных функций (применение производных)	1	Семинар
33 – 34	Использование числовых неравенств. Итоговая контрольная работа	2	Лекция Семинар

Упражнения по теме 5.

1. Решить уравнение:

$$\sqrt{|\sin \chi|} = \sqrt[4]{-|\sin \chi|} + \operatorname{tg} \chi, \text{ используя ОДЗ}$$

Ответ:  $\chi = \pi k, k \in \mathbb{Z}$

2. Решить неравенство, используя ОДЗ

$$\sqrt{\sin \chi} < \sqrt{1 - |\chi| + \sin \chi}$$

Ответ:  $0 \leq \chi < 1$

3. Решить уравнение

$$\sin(\chi^3 + 2\chi^2 + 1) = \chi^2 + 2\chi + 3, \text{ используя ограниченность функции}$$

Ответ: решений нет.

4. Решить уравнение:

$$\chi^3 - \chi - \sin \pi \chi = 0.$$

Ответ:  $0, \pm 1$

5. Решить уравнение:

$$2\pi \sin \chi = \left| \chi - \frac{\pi}{2} \right| - \left| \chi + \frac{\pi}{2} \right|, \text{ используя ограниченность функции}$$

$$0, (-1)^n \frac{6}{\pi} + \pi n; n = -1; -2 \dots$$

$$(-1)^{m+1} \frac{6}{\pi} + \pi n; m = -1, 2, \dots$$

Ответ:

6. Решить уравнение:

$$\sin^5 \chi + \frac{1}{\cos^7 \chi} = \cos^5 \chi + \frac{1}{\sin^7 \chi}$$

Ответ:  $\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$

7. Решить неравенство:

$$|\sin^2 \chi - \sin^4 \chi| + \sqrt{\left(\frac{\chi^2 - \pi^2}{1 + \chi^2}\right)^2} > 0$$

Распределяется на два неравенства:

$$|\sin^2 \chi - \sin^4 \chi| \geq 0, \left| \frac{\chi^2 - \pi^2}{1 + \chi^2} \right| \geq 0$$

Ответ:  $(-\infty; -\pi) \cup (-\pi; \pi) \cup (\pi; \infty)$

8. Решить неравенство:

$$\sqrt[4]{1 - \cos^4 \left( \frac{\chi^2 + \chi \pi}{4} \right)} + 2^{\sqrt{1 - \chi^4}} - 1 > 0$$

, распределяется на два неравенства

Ответ:  $\chi \in [-1; 1]$

9. Решить уравнение

$$\cos^4 \chi + \sin^5 \chi = 1$$

Ответ:  $2\pi m, \pi + 2\pi n, \frac{\pi}{2} + 2\pi k, m, n, k \in \mathbb{Z}$

10. Решить уравнение:

a)  $3 \cos^4 2\chi - 2 \sin^5 \chi = 5$

(использование свойств  $\sin \alpha$  и  $\cos \alpha$ )

Ответ:  $\frac{3\pi}{2} + 2\pi l, l \in \mathbb{Z};$

б)  $\cos^3 3\chi + \cos^{11} 7\chi = -2$

Ответ:  $\pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z};$

$$\left( \frac{1}{\sin^8 \chi} + \frac{1}{\cos^2 2\chi} \right) (\sin^8 \chi + \cos^2 2\chi) = 4 \cos^2 \sqrt{\frac{\pi^2}{4} - \chi^2}$$

(Используем, что справедливо неравенство  $\left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) (a + b) \geq 4$  )

Ответ:  $\frac{\pi}{2}; -\frac{\pi}{2}$

11. Решить неравенство:

$$20\chi^7 + 28\chi^5 + 210\sin 2\chi > 0$$

$$f(\chi) = 20\chi^7 + 28\chi^5 + 210\chi - 35\sin 2\chi, \text{ (использование монотонности функций)}$$

«Утверждаю»  
директор ГБОУ СОШ с.Черный Ключ  
\_\_\_\_\_ Макарова Л.В.

Приказ № \_\_\_\_ от \_\_\_\_\_

Принято  
педагогическим Советом

Протокол № \_\_\_\_ от \_\_\_\_\_

**Государственное общеобразовательное учреждение  
Самарский институт повышения квалификации  
работников образования**

***Зачетная работа по вариативному блоку*  
« Преемственность в обучении математике между  
начальной, основной и средней школами».**

**Проверил:**  
зав. кафедрой математики  
и информатики  
Максютин А.А.

**Выполнила:**  
учитель математики  
МОУ Черноключевской СОШ  
Клявлинского района  
Самарской области  
Антонова В.В.